ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΡΤΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α.1.Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$f(x)=g(x)+c$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Α.2. Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ να αποδείξετε ότι $(\alpha^x)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Α.3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της ; ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α5.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\kappa\in\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R}$ τότε η $y=\kappa$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

γ. Αν $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

δ. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}-3x^2+\alpha, & x<0\\ -x^3+3x^2+\beta, & x\geq 0\end{cases}$, παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι α=β=1. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β2. α. Να βρείτε την παράγωγο της f.

β. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{f(x)-5}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β4. Να δικαιολογήσετε, χωρίς να τις αναζητήσετε, ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 1

Β5. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=-1$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 2) και στη συνέχεια να λύσετε για x<0 την εξίσωση $f(x)+f(x^3)-8=6x(x^2+1)$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και α μία θετική πραγματική παράμετρος. Αν γνωρίζετε ότι

- $f'(x)+a=e^{-f(x)-ax}$, x>0
- $g(x)=e^{f(x)+ax}-x$, x>0
- $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-ax}{x}$

Γ1. Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε x>0 (ΜΟΝΑΔΕΣ 3) και ότι
$f(x)=\ln x-ax$, x>0 (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ2. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του α>ο για τον οποίο ισχύει
$f(x)\le -1$ για κάθε x>0 ισούται με 1 ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Για α=1

Γ3 α. Για την συνάρτηση v με v(x)=f(x)+x-1 να βρείτε τα x για τα οποία
$v\left(x^2+1\right)+v(x^4)<v(x^4+1)+v(x^2)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Για την παραγωγίσιμη $h:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $h(1)=2$, ισχύει $f(1)<h'(x)<f(e)$ για κάθε $x\in[1,2]$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$: $h(x_0)=4x_0-3$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. Υλικό σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 2μ/s. Αν Κ η προβολή του Μ στον xx΄, βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΚΜ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, όταν το Μ περνά από τη θέση μέγιστου της συνάρτησης f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to[-1,+\infty)$ με τύπο $f(x)=\alpha^{x-1}-\ln x-2$

όπου είναι $0<\alpha\neq 1$,

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-1}-\ln x-2$, για κάθε $x>0$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε δύο ακριβώς σημεία. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ3. Αν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της f,

α. Αν ξ>0, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}=f'(\xi)$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 2) και στη συνέχεια

β. ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}+2f(\xi)=0.$$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ4. Να δείξετε ότι για κιάθε $x>0$ ισχύει $f\left(e^{2x}\right)<\dfrac{e^x f(e^x)+f(e^{3x})}{1+e^x}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ5. Έστω συνάρτηση $g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{v}$, με $x\in\mathbb{R}$ και ν>0 . Αν γνωρίζεται ότι είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(v^2x)}{2^v x}=1$$

α. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή του ν είναι το 2. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Για την ελάχιστη τιμή του ν να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,v)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g είναι κάθετη της ευθείας $(\varepsilon): x+2y-2022=0$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Θεμα Α

Α1) Σχολικό βιβλιο σελιδα 133

Α2) Σχολικο βιβλιο σελιδες 116-117

Α3) Σχολικό βιβλιο σελιδα 104

Α4) α → Σωστό
β → Λαθος
γ → Λαθος
δ → Λαθος

Θεμα Β

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2+\alpha, & x<0 \\ -x^3+3x^2+\beta, & x \geq 0 \end{cases}$$

Β1) Η f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ αρα η f συνεχης στο $\mathbb{R}$ οποτε συνεχης και στο 0 συνεπως $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}(-3x^2+\alpha) = \lim_{x\to 0^+}(-x^3+3x^2+\beta) = -0^3+3\cdot 0^2+\beta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta \ (1)}$

Θετουμε $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-3}{x-1}$ για x κοντα στο 1 οποτε

$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (υποθεση) (2)

Για x κοντα στο 1 ειναι $f(x) = (x-1)\varphi(x)+3$

οποτε $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\varphi(x)+3\right] \overset{(2)}{=} (1-1)\ell+3 = 3$

Ομως f συνεχης στο $\mathbb{R}$ αρα και στο 1 συνεπως

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow -1^3+3\cdot 1^2+\beta = 3 \Leftrightarrow -1+\beta = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 1}$ οποτε απο (1) εχουμε οτι $\boxed{\alpha = 1}$

B2) α) $f(x)=\begin{cases} -3x^2+1, & x<0 \\ -x^3+3x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

Η f παρ/μη στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=(-3x^2+1)'$
$=-6x,\ x<0$

Η f παρ/μη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=(-x^3+3x^2+1)'$
$=-3x^2+6x,\ x>0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-3x)=0 \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\cancel{2}}(-x+3)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^+}[x(3-x)]=0 \quad (4)$$

Από (3),(4) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$

οπότε $f'(0)=0$ άρα κρίσιμο σημείο της f.

Επομένως η f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\begin{cases} -6x, & x<0 \\ -3x^2+6x, & x\geq 0 \end{cases}$

β) Παρατηρούμε ότι $f'(x)=-6x>0\ \forall x<0$

Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0$
$\overset{-3x<0}{\underset{\forall x>0}{\Leftrightarrow}}\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Συνεπώς τα 0,2 κρίσιμα σημεία της f

γ) Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x)\gtrless 0 \Leftrightarrow -3x(x-2)\gtrless 0$
$\overset{-3x<0}{\underset{\forall x>0}{\Leftrightarrow}}\ x-2\lessgtr 0 \Leftrightarrow x\lessgtr 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	
f		↗		↗	5	↘	

Άρα $f'(x)>0\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$
και f συνεχής στο $(-\infty,2]$ οπότε
$f\uparrow(-\infty,2]$

$f'(x)<0\ \forall x\in(2,+\infty)$ και f συνεχής στο $[2,+\infty)$ οπότε $f\downarrow[2,+\infty)$

Παρατηρηση

Στις εξετασεις αναζητηση σημειων καμπης θα ζητηθουν μονο σε συναρτησεις που ειναι δύο, τουλάχιστον, φορές παρ/μη στο εσωτερικό του πεδιου ορισμου τους. Εδω εγινε αναζητηση για λογους πληροτητας της λυσης

B4) Οι κλαδοι της συναρτησης f ειναι πολυώνυμα 2ου και 3ου βαθμου αντιστοιχα οποτε δεν εχουν ασυμπτωτες (Σχολιο σχολικου βιβλιου σελιδα 163)

B5) Ειναι $f(-1) = -3(-1)^2+1 = -3+1 = -2$

και $f'(-1) = -6(-1) = 6$

Αρα η εφαπτομενη της C_f στο $x_0=-1$ εχει εξισωση.

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y+2 = 6(x+1) \Leftrightarrow \boxed{y=6x+4}$$

Για $x<0$ εχουμε $f(x)+f(x^3)-8 = 6x(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow [f(x)-(6x+4)]+[f(x^3)-(6x^3+4)]=0 \quad (5)$$

$f \cap (-\infty,0]$ αρα η C_f βρισκεται κατω απο την εφαπτομενη (ε) με εξαιρεση το σημειο επαφης $A(-1,-2)$ δηλαδη

$f(x) \leq 6x+4 \ \forall x<0$ (5) με το "=" μονο για $x=-1$ δηλαδη

$$f(x)=6x+4 \Leftrightarrow x=-1 \quad (6)$$

Θετοντας στην (5) οπου x το x^3, με $x<0$ εχουμε:

$f(x^3) \leq 6x^3+4 \Leftrightarrow f(x^3)-(6x^3+4) \leq 0 \ \forall x<0$ (7) με το "=" αν και μονο αν $x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$ (8)

$$\xLeftrightarrow{(5),(7)} f(x)-(6x+4)=0 \text{ και } f(x)-(6x^3+4)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=6x+4 \text{ και } f(x^3)=6x^3+4$$

$$\xLeftrightarrow{(6),(8)} x=-1 \text{ και } x=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$$

Αρα η f στη θεση $x=2$ παρουσιαζει ολικο μεγιστο το $f(2)=5$

δ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{f(x)-5} = \lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{f(x)-5}(x+3)\right] = -\infty$ διοτι

$\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5>0$

$\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-5) \underset{=}{\overset{f \text{ συν. } 2}{=\!=}} f(2)-5=0$ και $f(x)-5<0$ κοντα στο 2

(διοτι απο (γ) ερωτ. $f(x)\le f(2)=5$ $\forall x\in\mathbb{R}$ με το "=" μονο για $x=2$

αρα $f(x)-5<0$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$)

συνεπως $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)-5}=-\infty$

B3) Η f' παρ/μη στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμικη με $f''(x)=-6<0$ για καθε $x<0$

Η f' παρ/μη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμικη με $f''(x)=-6x+6,\ x>0$

Για $x\in(0,+\infty)$ εχουμε:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x+6=0 \Leftrightarrow -6x=-6 \Leftrightarrow x=1$

$f''(x)\gtrless 0 \Leftrightarrow -6x+6\gtrless 0 \Leftrightarrow -6x\gtrless -6 \Leftrightarrow x\lessgtr 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$
f	∩	Σ.Κ	∪	Σ.Κ	∩

$f''(x)<0$ $\forall x\in(-\infty,0)$ και f συνεχης στο $(-\infty,0]$

οποτε $f \cap (-\infty,0]$

$f''(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$ και f συνεχης στο $[0,1]$

οποτε $f \cup [0,1]$

$f''(x)<0$ $\forall x\in(1,+\infty)$ και f συνεχης στο $[1,+\infty)$

οποτε $f \cap [1,+\infty)$

Η f αλλαζει κυρτοτητα εκατερωθεν των 0 και 1 και οριζεται εφαπτομενη της C_f στα σημεια με τετμημενες τα $x_1=0$ και $x_2=1$ οποτε τα $A(0,f(0))$ ή $A(0,1)$ και $B(1,f(1))$ ή $B(1,3)$ σημεια καμπης της C_f

Θεμα Γ

(Γ1) $g(x)=e^{f(x)+ax}-x,\ x>0$

$g'(x)=(f'(x)+a)e^{f(x)+ax}-1 \overset{υποθ}{=} e^{-f(x)-ax}\cdot e^{f(x)+ax}-1=0$

άρα g σταθερή στο $(0,+\infty)$ οπότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τ.ω

$g(x)=c \Leftrightarrow e^{f(x)+ax}-x=c \Leftrightarrow e^{f(x)+ax}=c+x$ (1)

$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{ημx-ax}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}-a\right)=1-a$

άρα $f'(1)+a=e^{-f(1)-a} \Leftrightarrow e^{-f(1)-a}=e^{0} \Leftrightarrow \boxed{f(1)=-a}$

Για $x=1$ η (1) δίνει $e^{f(1)+a}=c+1 \Leftrightarrow \boxed{c=0}$

Άρα $e^{f(x)+ax}=x \Leftrightarrow f(x)+ax=\ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\ln x-ax,\ x>0}$

Γ2) $f'(x)=\frac{1}{x}-a \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1-ax}{x},\ x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-ax}{x}=0 \Leftrightarrow 1-ax=0 \Leftrightarrow ax=1 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{a}$

$f'(x)\gtrless 0 \Leftrightarrow \frac{1-ax}{x}\gtrless 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-ax\gtrless 0 \Leftrightarrow ax\lessgtr 1 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} x\lessgtr\frac{1}{a}$

x	0		$1/a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

$f\uparrow (0,\frac{1}{a}]$ $f\downarrow [\frac{1}{a},+\infty)$

Η f στη θέση $x=\frac{1}{a}$ παρουσιάζει ο.Μ

το $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-a\cdot\frac{1}{a}=-\ln a-1$

Είναι $f(x)\le -1\ \forall x>0 \Leftrightarrow \max f\le -1 \Leftrightarrow -\ln a-1\le -1$

$\Leftrightarrow -\ln a\le 0 \Leftrightarrow \ln a\ge 0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{\ln a}\ge e^0 \Leftrightarrow a\ge 1$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του a είναι το 1.

Γ3) α) $v(x)=f(x)+x-1=\ln x-x+x-1=\ln x-1,\ x>0$

Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x^2+1>0,\ x^4>0,\ x^4+1>0$

και $x^2>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ x\ne 0,\ x\in\mathbb{R}$ και $x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 0$

Για $x\ne 0$ έχουμε $v(x^2+1)+v(x^4)<v(x^4+1)+v(x^2)$

$\Leftrightarrow v(x^2+1)-v(x^2)<v(x^4+1)-v(x^4)$ (2)

Scanned with CamScanner

Θεωρουμε $h(x) = v(x+1) - v(x) = \ln(x+1) - \ln x$, $x > 0$

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} < 0 \quad \forall x > 0$

αρα $\underline{\underline{h \downarrow (0, +\infty)}}$

Συνεπως η ② $\Leftrightarrow h(x^2) < h(x^4) \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2 > x^4 \underset{\forall x \neq 0}{\overset{:x^2>0}{\Longleftrightarrow}} 1 > x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

β) $f(x) = \ln x - x$ αρα $f(1) = -1$, $f(e) = 1 - e$

αρα $f(1) < h'(x) < f(e)$ $\forall x \in [1, e] \Leftrightarrow -1 < h'(x) < 1 - e < 0$

$\forall x \in [1, 2] \Rightarrow h'(x) < 0 \ \forall x \in [1, 2] \Rightarrow h \downarrow [1, 2]$

Θεωρουμε $\varphi(x) = h(x) - 4x + 3$, $x \in [1, 2]$

$\varphi(1) = h(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$

$\varphi(2) = h(2) - 5$

Απο Θ.Μ.Τ. για την h στο $[1, 2]$ εχουμε οτι υπαρχει

$\xi \in (1, 2)$: $h'(\xi) = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = h(2) - 1$

ομως $h'(x) < 1 - e$ $\forall x \in [1, 2] \Rightarrow h'(\xi) < 1 - e \Rightarrow h(2) - 1 < 1 - e$

$\Rightarrow h(2) - 5 < -3 - e < 0 \Rightarrow \varphi(2) < 0$

αρα $\varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0$ οποτε απο Θ. Bolzano υπαρχει $x_0 \in (1, 2)$

τ.ω. $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) = 4x_0 - 3$

$\varphi'(x) = h'(x) - 4 < 0$ $\forall x \in [1, 2] \Rightarrow \varphi \downarrow [1, 2]$ αρα η ριζα x_0

μοναδικη της φ

γ) Εστω $M(x, y)$ ενα σημειο της C_f

$E = (OKM) = \frac{(OK)(KM)}{2} \overset{x>0}{=} \frac{x f(x)}{2} = \frac{-x(\ln x - x)}{2}$, $x > 0$ $(x > \ln x \ \forall x > 0)$

Τη χρονικη στιγμη t ειναι $x = x(t)$ και $E = \frac{x \ln x - x^2}{2}$, $x > 0$ αρα,

$E(t) = -\frac{x(t) \ln x(t) - x^2(t)}{2}$, $x(t) > 0$ με $t \geq 0$ οποτε $E'(t) = -\frac{x'(t)\left(\ln x(t) + 1 - 2x(t)\right)}{2}$

Τη χρονικη στιγμη t_0 το M περναει απο το μεγιστο της f αρα $x(t_0) = 1$

οποτε $E'(t_0) = +1 \ \mu^2/sec$)

Θεμα Δ

Δ1) $f(x)=a^{x-1}-\ln x-2,\ x>0$

Η f παρ/μη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=a^{x-1}\ln a-\frac{1}{x}$

Απο υποθεση $f(x)\geq -1\ \forall x>0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(1)\ \forall x>0$

οποτε η f στη θεση $x=0$ παρουσιαζει Ο.Ε.

Το 1 εσωτερικο σημειο του $(0,+\infty)$ και η f παρ/μη στο 1 (ως παρ/μη στο $(0,+\infty)$) οποτε απο Θ.Fermat $f'(1)=0$

$\Leftrightarrow a^{0}\ln a-1=0 \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow e^{\ln a}=e^{1} \Leftrightarrow a=e$

Δ2) Για $a=e$ εχουμε $f(x)=e^{x-1}-\ln x-2,\ x>0$

$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x},\ x>0$ και $f''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0\ \forall x>0$

$\rightarrow$ $f'\uparrow(0,+\infty)$

Παρατηρουμε οτι $f'(1)=0$ και η $f'\uparrow(0,+\infty)$ αρα ηριζα $x=1$ μοναδικη της f' στο $(0,+\infty)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} x<1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 0<x<1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} x>1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$f'(x)<0\ \forall x\in(0,1)$ και f συνεχης στο $(0,1]$ οποτε $f\downarrow(0,1]$

$f'(x)>0\ \forall x\in(1,+\infty)$ και f συνεχης στο $[1,+\infty)$ οποτε $f\uparrow[1,+\infty)$

Η f συνεχης και γν. φθινουσα στο $A_1=(0,1]$ οποτε

$f(A_1)=[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x))=[-1,+\infty)$

διοτι $\lim_{x\to0^+}(e^{x-1}-2)=e^{-1}-2$, $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ οποτε

$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

Η f συνεχης και γν. αυξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ οποτε

$f(A_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$ διοτι

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{x-1} - \ln x - 2) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} - \frac{2}{e^{x-1}}\right)\right]$

$= +\infty$ διοτι $\lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$ αρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{x-1}}\right)$

$= 0 \cdot 0 = 0$

Συνεπως: $0 \in f(A_1)$ αρα υπαρχει $x_1 \in (0,1)$ (διοτι $f(1) = -1 \neq 0$)

τ.ω. $f(x_1) = 0$ και επειδη η $f \downarrow A_1$ η ριζα x_1 μοναδικη της f

στο A_1.

$0 \in f(A_2)$ αρα υπαρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ (διοτι $f(1) = -1 \neq 0$) τ.ω

$f(x_2) = 0$ και επειδη η $f \uparrow A_2$ η ριζα x_2 μοναδικη της f στο A_2

Συνεπως η $f(x) = 0$ εχει ακριβως 2 ριζες στο $(0, +\infty)$

οποτε η C_f τεμνει ακριβως σε 2 σημεια με τετμημενες

$x_1 < 1 < x_2$.

Δ3) α) Η f παρ/μη στο $\xi \in (0, +\infty)$ ως παρ/μη στο $(0, +\infty)$

οποτε $f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}$ (1)

Ειναι $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) + f(\xi) - f(\xi-h)}{2h}$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{2h} - \frac{f(\xi-h) - f(\xi)}{2h}\right] \overset{(1)}{=} \frac{f'(\xi)}{2} - \left(-\frac{f'(\xi)}{2}\right) = f'(\xi)$

διοτι $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi-h) - f(\xi)}{2h} \underset{u_0 = \lim_{h\to 0}(-h) = 0}{\overset{-h = u \to h = -u}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{f(\xi+u) - f(\xi)}{-2u} \overset{(1)}{=} -\frac{f'(\xi)}{2}$

β) Αρκεί ν.α.ο υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τ.ω.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}+2f(\xi)=0 \overset{(α)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)+2f(\xi)=0$$

Θεωρούμε $\varphi(x)=f'(x)+2f(x),\ x\in[x_1,x_2]$

Η φ συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως άθροισμα συνεχών

$\varphi(x_1)=f'(x_1)+2f(x_1)\overset{f(x_1)=0}{=\!=}f'(x_1)<0$ διότι $f'(x)<0$

για κάθε $x\in(0,1)$ και $x_1\in(0,1)$

$\varphi(x_2)=f'(x_2)+2f(x_2)\overset{f(x_2)=0}{=\!=}f'(x_2)>0$ διότι $f'(x)>0$

για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και $x_2\in(1,+\infty)$

άρα $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$ οπότε από Θ.Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$

τ.ω. $\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)+2f(\xi)=0$

2ος τρόπος: Θεώρημα Rolle για την $\varphi(x)=e^{2x}f(x),\ x\in[x_1,x_2]$

$$\left.\begin{aligned}\text{αφού}\quad \varphi(x_1)&=e^{2x_1}\cdot f(x_1)\overset{(Γ2)}{=\!=}0\\ \varphi(x_2)&=e^{2x_2}f(x_2)\overset{(Γ2)}{=\!=}0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$$

φ συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως γινόμενο συνεχών

φ παρ/μη στο (x_1,x_2) ως γινόμενο παρ/μων με $\varphi'(x)=e^{2x}(f'(x)+2f(x))$

$x\in(x_1,x_2)$ οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τ.ω

$\varphi'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{2\xi}(f'(\xi)+2f(\xi))=0 \overset{e^{2\xi}>0}{\Longleftrightarrow} f'(\xi)+2f(\xi)=0$

Δ4) Για $x>0$ είναι $x<2x<3x \overset{e^x\uparrow}{\Longleftrightarrow} e^x<e^{2x}<e^{3x}$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα συνεχής στα $[e^x,e^{2x}]$ και $[e^{2x},e^{3x}]$

Η f παρ/μη στο $(0,+\infty)$ άρα παρ/μη στα (e^x,e^{2x}) και (e^{2x},e^{3x})

οπότε από Θ.Μ.Τ υπάρχουν:

$$\xi_1\in(e^x,e^{2x}):\ f'(\xi_1)=\frac{f(e^{2x})-f(e^x)}{e^{2x}-e^x}=\frac{f(e^{2x})-f(e^x)}{e^x(e^x-1)}\quad ②$$

και $\xi_2 \in (e^{2x}, e^{3x})$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{3x} - e^{2x}} = \dfrac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{2x}(e^x - 1)}$ ③

$e^x < \xi_1 < e^{2x} < \xi_2 < e^{3x}$ αρα $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\iff} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$\overset{②,③}{\iff} \dfrac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{\cancel{e^x}\cancel{(e^x-1)}} < \dfrac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{2x}\cancel{(e^x-1)}}$

$\underset{\forall x>0}{\overset{e^x, e^x-1>0}{\iff}} e^x(f(e^{2x}) - f(e^x)) < f(e^{3x}) - f(e^{2x})$

$\iff e^x f(e^{2x}) - e^x f(e^x) < f(e^{3x}) - f(e^{2x})$

$\iff e^x f(e^{2x}) + f(e^{2x}) < e^x f(e^x) + f(e^{3x})$

$\iff (e^x + 1) f(e^{2x}) < e^x f(e^x) + f(e^{3x})$

$\overset{e^x+1>0}{\iff} \boxed{f(e^{2x}) < \dfrac{e^x f(e^x) + f(e^{3x})}{e^x + 1}}$

Δ5) α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\nu^2 x)}{2^\nu x} = \dfrac{1}{2^\nu} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\nu^2 x)}{x} \underset{u_0 = \lim\limits_{x\to 0}(\nu^2 x) = 0}{\overset{\nu^2 x = u \overset{\nu^2\neq 0}{\Rightarrow} x = u/\nu^2}{=\!=\!=}} \dfrac{1}{2^\nu} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u/\nu^2}$

$= \dfrac{1}{2^\nu} \cdot \nu^2 \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = \dfrac{\nu^2}{2^\nu} \cdot 1 = \dfrac{\nu^2}{2^\nu}$

Συνεπως επειδη $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\nu^2 x)}{2^\nu \cdot x} = 1$ εχουμε οτι $\dfrac{\nu^2}{2^\nu} = 1$

$\iff \nu^2 = 2^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ④

Παρατηρουμε οτι οι $\nu = 2$ και $\nu = 4$ ειναι λυσεις της εξισωσης ④

Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ η ④ $\iff \ln \nu^2 = \ln 2^\nu \iff 2\ln\nu = \nu \ln 2$

$\overset{\nu \cdot \ln 2 > 0}{\iff} \dfrac{\ln\nu}{\nu} = \dfrac{\ln 2}{2}$ ⑤

Θεωρουμε $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Η h συνεχης και παρ/μη στο

$(0, +\infty)$ ως πηλικο συνεχων και παρ/μων συναρτησεων με

$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$

$h'(x) \gtrless 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} \gtrless 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x \gtrless 0 \Leftrightarrow \ln x \lessgtr 1 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x \lessgtr e$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	

$h'(x)>0\ \forall x\in(0,e)$ και h συνεχης στο $(0,e]$ οποτε $h\uparrow(0,e]$

$h'(x)<0\ \forall x\in(e,+\infty)$ και h συνεχης στο $[e,+\infty)$ οποτε $h\downarrow[e,+\infty)$

Η (5) $\Leftrightarrow h(\nu)=\frac{\ln 2}{2}$

Ειναι $h(2)=\frac{\ln 2}{2}$ και η $h\uparrow(0,e]$ η ριζα $x=2$ μοναδικη της $h(x)=\frac{\ln 2}{2}$ στο $(0,e]$

και $h(4)=\frac{\ln 2}{2}$ και η $h\downarrow[e,+\infty)$ η ριζα $x=4$ μοναδικη της $h(x)=\frac{\ln 2}{2}$ στο $[e,+\infty)$

Επομενως η ελαχιστη τιμη του ν ειναι το 2

β) Ειναι $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$. Ειναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$

Αρκει ν.α.ο υπαρχει ένα τουλαχιστον $\xi\in(1,2)$ τετοιο, ωστε

$g'(\xi)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow g'(\xi)=2 \Leftrightarrow e^\xi-\xi-2=0$

(διοτι $g'(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$)

Θεωρουμε $G(x)=e^x-x-2,\ x\in[1,2]$

G συνεχης στο $[1,2]$ και $G(1)=e-3<0$ και $G(2)=e^2-4$ $=(e-2)(e+2)>0$ αρα $G(1)\cdot G(2)<0$ οποτε απο Θ.Bolzano υπαρχει $\xi\in(1,2)$: $G(\xi)=0 \Leftrightarrow e^\xi-\xi-2=0$

Η G παρ/μη στο $(1,2)$ με $G'(x)=e^x-1>0\ \forall x\in(1,2)$

(διοτι $x>1 \overset{e^x \uparrow}{\Longrightarrow} e^x>e \Rightarrow e^x-1>e-1>0 \Rightarrow G'(x)>0$)

οποτε $G'(x)>0$ $\forall x\in(1,2)$ και G συνεχης στο $[1,2]$ οποτε

$G\uparrow[1,2]$ αρα η ριζα $x=\xi$ μοναδικη της $G(x)=0$ στο $[1,2]$